Approximatie van oneindige lineaire programma's en spelen met eindige deelprogramma's en deelspelen

Tijs, S.H.

Published in:
Bulletin of the Belgian Mathematical Society, Simon Stevin

Publication date:
1979

SIMON STEVIN, A Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics
Volume 53 (1979), Number 3 (July 1979)

APPROXIMATIE VAN ONEINDIGE LINEAIRE PROGRAMMA'S EN SPELEN MET EINDIGE DEELPROGRAMMA'S EN DEELSPELEN

S.H. Tijs

communicated by J.A. Thas

In dit artikel worden in §2 een drietal $m\times\infty$-programmeringsproblemen (P_1^c), (P_1) en (P_1^*) bestudeerd. Ondermeer blijkt dat de waarden van deze programma's onder zekere voorwaarden gelijk zijn. Bij het bewijs hiervan wordt gebruik gemaakt van twee opmerkelijke stellingen 1 en 2, welke handelen over de existentie van een eindige positieve lineaire combinatie, die aan een zekere (on-)gelijkheid voldoet, als bekend is dat er een oneindige positieve lineaire combinatie van elementen uit een oneindige rij vectoren in $\mathbb{R}^p$ bestaat, welke aan deze (on-)gelijkheid voldoet. In §3 leiden we voor het duale paar (P_1^c) en (P_2) van halfoneindige programma's o.a. een tweetal dualiteitsstellingen af door approximatie met eindige deelprogramma's. Als toepassing wordt in §4 een minimaxstelling voor halfoneindige matrixspelen bewezen.

1. INLEIDING

Aan eindige lineaire programma's en eindige matrixspelen is de afgelopen halve eeuw uitgebreid aandacht besteed en er zijn vele fraaie resultaten geboekt. Hierbij valt ondermeer te denken aan

(a) de afleiding van de dualiteitsstelling voor lineaire programma's en de minimaxstelling van J. von Neumann voor matrixspelen,

(b) de opheldering van de structuur van de oplossingsruimte voor programma's (zie Goldman & Tucker [2]) en matrixspelen (zie Karlin [4]),

(c) de ontwikkeling van numerieke methoden voor het berekenen of benaderen van oplossingen (zie Dantzig [1]).

In het volgende zullen we proberen kennis voor eindige programma's en spelen te benutten bij de bestudering van oneindige programma's en spelen. De nadruk zal vallen op halfoneindige lineaire programmeringsproblemen (HOP's) d.w.z. optimaliseringsproblemen waarbij eindig (resp. aftelbaar oneindig) veel lineaire restricties en aftelbaar oneindig (resp. eindig) veel variabelen optreden en waarbij de doelfunctie lineair is.

Dergelijke oneindige problemen spelen op allerlei plaatsen een rol:

(1) Halfoneindige matrixspelen zijn op een zinvolle wijze in verband te brengen met verwante HOP's (zie §4).

(2) Elk convex optimaliseringsprobleem in $\mathbb{R}^m$ (met affiene doelfunctie) correspondeert met een HOP.

(3) In de approximatietheorie spelen HOP's een rol. (Zie Krabs [5]).

(4) Ook treden oneindige programma's op bij productiemodellen (oneindig veel mogelijke activiteiten, oneindig veel typen grondstoffen), mengproblemen (oneindig veel concentraties) en transportproblemen (oneindig veel bronnen of bestemmingen).

2. EINDIGE EN HALFONEINDIGE LINEAIRE PROGRAMMERINGSPROBLEMEN

In het volgende is $\mathbb{R}^\infty$ de verzameling van oneindige rijen van reële getallen, $\mathbb{R}^\infty_c$ de deelverzameling van $\mathbb{R}^\infty$ bestaande uit die oneindige rijen waarvoor eindig veel elementen ongelijk aan 0 zijn en $\mathbb{R}^\infty_+$ de deelverzameling van $\mathbb{R}^\infty$ bestaande uit de rijen met uitsluitend niet-negatieve elementen. Verder is $m \in \mathbb{N}$ en $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. We bekijken een geordend drietal $\langle A,b,c\rangle$, waarbij A een $m \times n$-matrix van reële getallen is, $b \in \mathbb{R}^m$ en $c \in \mathbb{R}^n$.

Laten we allereerst veronderstellen dat $n \in \mathbb{N}$ (<u>het eindige geval</u>). Dan corresponderen met $\langle A,b,c\rangle$ twee duale lineaire programmeringsproblemen (P_1) en (P_2) waarbij

(P_1) : Bepaal $v_1 := \sup_{x \in M_1} c'x$ waarbij $M_1 := \{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax \leq b,\ x \geq 0\}$
en vind (zo mogelijk) elementen uit $O_1 := \{x \in M_1;\ c'x = v_1\}$,

(P_2) : Bepaal $v_2 := \inf_{y \in M_2} y'b$ waarbij $M_2 := \{y \in \mathbb{R}^m;\ y'A \geq c',\ y \geq 0\}$

en vind (zo mogelijk) elementen uit $O_2 := \{y \in M_2;\ y'b=v_2\}$.

Voor $i \in \{1,2\}$ worden M_i, v_i en O_i achtereenvolgens genoemd: het <u>toelaatbare gebied</u>, de <u>waarde</u> en de <u>oplossingsruimte</u> van het programma (P_i).

De inhoud van de <u>dualiteitsstelling</u> (voor eindige programma's) is: als minstens één der programma's (P_1) en (P_2) uitvoerbaar is (d.w.z. $M_1 \neq \emptyset$ of $M_2 \neq \emptyset$), dan $v_1 = v_2 \in [-\infty,\infty]$; zijn beide programma's uitvoerbaar, dan $v_1 = v_2 \in \mathbb{R}$ en $O_1 \neq \emptyset$, $O_2 \neq \emptyset$. [Hierbij is afgesproken dat $\sup(\emptyset) := -\infty$, $\inf(\emptyset) := \infty$.]

Laten we nu veronderstellen dat $n = \infty$ (<u>het halfoneindige geval</u>). Ook in dit geval heeft het zin om probleem (P_2) te bekijken. Maar (P_1) kunnen we nu niet zonder meer overnemen, aangezien uitdrukkingen als Ax en $c'x$ zinloos kunnen zijn. Bij de definitie van het toelaatbare gebied dienen we hier rekening mee te houden. In feite melden nu meerdere verzamelingen zich als candidaat voor het toelaatbare gebied zoals

$$M_1 := \{x \in \mathbb{R}_+^\infty;\ c'x \in \mathbb{R},\ \Sigma_{j=1}^\infty a_{ij}x_j \in (-\infty,b_i] \text{ voor elke } i \in \{1,\dots,m\}\},$$

$$M_1^c := \{x \in \mathbb{R}_c^\infty;\ Ax \leq b,\ x \geq 0\},$$

$$M_1^* := \{x \in \mathbb{R}_+^\infty;\ c'x \in [-\infty,\infty),\Sigma_{j=1}^\infty a_{ij}x_j \in [-\infty,b_i] \text{ voor elke } i \in \{1,\dots,m\}\}.$$

Met M_1 zo gedefinieerd heeft (P_1) weer zin. Verder kunnen we kijken naar twee andere problemen (P_1^c) en (P_1^*) waarbij

(P_1^c) : Bepaal $v_1^c := \sup_{x \in M_1^c} c'x$ en zoek elementen van

$$O_1^c := \{x \in M_1^c;\ c'x = v_1^c\},$$

(P_1^*) : Bepaal $v_1^* := \sup_{x \in M_1^*} c'x$ en zoek elementen van

$$O_1^* := \{x \in M_1^*;\ c'x = v_1^*\}.$$

In de nu volgende stellingen 3 en 4 vergelijken we de problemen (P_1), (P_1^c) en (P_1^*) met elkaar. Hierbij zijn de stellingen 1 en 2 nuttig.

<u>STELLING</u> 1. <u>Zij $v,v^1,v^2,v^3,\dots$ een oneindige rij vectoren in $\mathbb{R}^p$. Zij $(x_1,x_2,\dots) \in \mathbb{R}_+^\infty$ en $v = \Sigma_{j=1}^\infty x_jv^j$. Dan is v een element van de convexe kegel</u> $ck\{v^j;\ j \in \mathbb{N}\}$ <u>voortgebracht door $v^1,v^2,\dots$</u> .

Bewijs: Het is een bekend feit (zie bijv. [3] blz.201, 3.70 of [10] blz.5) dat voor een oneindige rij $v, w^1, w^2, w^3, \ldots$ in $\mathbb{R}^p$, waarvoor $v = \Sigma_{j=1}^{\infty} a_j w^j$ voor zekere $(a_1, a_2, \ldots) \in \mathbb{R}_+^{\infty}$ met $\Sigma_{j=1}^{\infty} a_j = 1$, geldt dat v een element is van het convexe omhulsel $\hat{c}o\{w^1, w^2, \ldots\}$ van $\{w^1, w^2, \ldots\}$. Hieruit volgt, door 2^{-j} de rol van a_j en $2^j x_j v^j$ de rol van w^j te laten spelen, dat

$$v = \Sigma_{j=1}^{\infty} 2^{-j}(2^j x_j v^j) \in \hat{c}o\{2^j x_j v^j;\ j \in \mathbb{N}\} \subset ck\{v^j;\ j \in \mathbb{N}\}. \quad ||$$

STELLING 2. *Zij $z, v^1, v^2, v^3, \ldots$ een rij vectoren in $\mathbb{R}_-^p := \{x \in \mathbb{R}^p;\ x \le 0\}$ en zij $(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}_+^{\infty}$. Veronderstel verder dat voor het element $v := \Sigma_{j=1}^{\infty} x_j v^j \in [-\infty, \infty)^p$ geldt dat $v \le z$. Dan is er een $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots) \in \mathbb{R}_c^{\infty}$ zo dat $\Sigma_{j=1}^{\infty} \hat{x}_j v^j \le z$.*

Bewijs: Als $v \in \mathbb{R}^p$, dan volgt de stelling direct uit stelling 1. Veronderstel dat $I := \{i \in \{1, \ldots, m\},\ v_i = -\infty\} \ne \emptyset$. Kies een $n^* \in \mathbb{N}$ zo dat voor elke $n \ge n^*$ en elke $i \in I$ geldt: $(\Sigma_{j=1}^{n} x_j v^j)_i \le z_i$. Definieer nu de rij vectoren $w^1, w^2, \ldots$ in $\mathbb{R}^p$ door $w^j := v^j$ als $j \le n^*$ en voor $j > n^*$

$$(w^j)_i := (v^j)_i \quad \text{voor elke } i \in \{1, \ldots, m\} \setminus I$$

$$(w^j)_i := 0 \quad \text{voor elke } i \in I.$$

Dan $q := \Sigma_{j=1}^{\infty} x_j w^j \in \mathbb{R}^p$ en $q \le z$.
Uit stelling 1 volgt, dat er een $\hat{x} \in \mathbb{R}_c^{\infty}$ is zo dat $\Sigma_{j=1}^{\infty} \hat{x}_j w^j = q \le z$.
Maar dan is ook $\Sigma_{j=1}^{\infty} \hat{x}_j v^j \le z$ omdat $v^j \le w^j$ voor elke $j \in \mathbb{N}$. $||$

STELLING 3. (Vgl. met [10], theorem 4).
Voor de problemen (P_1) en (P_1^c) geldt:
(1) *beide problemen zijn uitvoerbaar of beide zijn onuitvoerbaar,*
(2) $v_1 = v_1^c$,
(3) $O_1 \ne \emptyset \Leftrightarrow O_1^c \ne \emptyset$.

Bewijs: Uit $M_1^c \subset M_1$ volgt dat (P_1) uitvoerbaar is als (P_1^c) uitvoerbaar is. Zij $x \in M_1$. Dan

$$\begin{pmatrix} Ax \\ c'x \end{pmatrix} = \Sigma_{j=1}^{\infty} x_j \begin{pmatrix} k^j \\ c_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}$$

waarbij k^j de j-de kolom van A is ($j \in \mathbb{N}$).
Door nu in stelling 1 de rol van v^j te laten spelen door $\begin{pmatrix} k^j \\ c_j \end{pmatrix}$ en de rol van v door $\begin{pmatrix} Ax \\ c'x \end{pmatrix}$, kunnen we concluderen:

(*) voor elke $x \in M_1$ is er een $\hat{x} \in M_1^c$ met $A\hat{x} = Ax$, $c'\hat{x} = c'x$,

want (*) is equivalent met $\begin{pmatrix} Ax \\ c'x \end{pmatrix} \in ck\{\begin{pmatrix} k^j \\ c_j \end{pmatrix};\ j \in \mathbb{N}\}$.
Uit (*) volgt nu zonder moeite dat (P_1^c) uitvoerbaar is indien (P_1) uitvoerbaar is en ook dat $v_1^c = v_1$. Maar dan $O_1^c \subset O_1$. Verder kan men dan weer met behulp van (*) concluderen dat $O_1^c \neq \emptyset$ als $O_1 \neq \emptyset$. ||

STELLING 4.

(a) Als $A \geq 0$ en $c \geq 0$, dan $v_1 = v_1^c = v_1^*$.

(b) Als $A \leq 0$, dan $v_1 = v_1^c = v_1^*$.

Bewijs: (a) volgt direct uit stelling 3 en het feit dat $M_1 = M_1^*$ als $A \geq 0$ en $c \geq 0$.
(b) Stel $A \leq 0$. Als $M_1^* = \emptyset$, dan $\emptyset = M_1^c \subset M_1^*$, en dan $v_1^c = v_1^* = -\infty$.
Stel $M_1^* \neq \emptyset$. Dan volgt uit stelling 2 (neem $z = b$, $v^j = k^j$) dat $M_1^c \neq \emptyset$. Maar dan $v_1^* \in (-\infty, 0]$. Eveneens volgt uit stelling 2 (neem $z = \begin{pmatrix} b \\ c'x \end{pmatrix}$, $v^j = \begin{pmatrix} k^j \\ c_j \end{pmatrix}$), dat voor elke $x \in M_1^*$ met $c'x \in \mathbb{R}$ er een $\hat{x} \in M_1^c$ is zo dat $c'\hat{x} = c'x$. Maar dan $v_1^c = v_1^*$. ||

3. APPROXIMATIE VAN HALFONEINDIGE PROGRAMMA'S MET EINDIGE DEELPROGRAMMA'S. DUALITEITSKLOVEN

In het volgende bekijken we het paar problemen P_1^c en P_2 bij een drietal $<A,b,c>$ waarbij $A = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m\ \ \infty}$ een $m\times\infty$-matrix is, $b \in \mathbb{R}^m$ en $c = (c_1, c_2, \ldots)' \in \mathbb{R}^\infty$. $M_1^c, M_2, v_1^c, v_2, O_1^c$ en O_2 hebben dezelfde betekenis als in §2.
Voor elke $k \in \mathbb{N}$ zij $A(k)$ de $m\times k$-matrix $[a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m\ \ k}$ en $c(k)$ de vector $(c_1, c_2, \ldots, c_k)' \in \mathbb{R}^k$. Met zo'n drietal $<A(k), b, c(k)>$ corresponderen twee eindige programma's:

(P_1^k) $c(k)'x$ - max! o.d.v. $A(k)x \leq b$, $x \geq 0$,

(P_2^k) $y'b$ - min! o.d.v. $y'A(k) \geq c(k)$, $y \geq 0$.

Het toelaatbare gebied, de waarde en de oplossingsruimte van (P_i^k) geven we achtereenvolgens aan met $M_i(k)$, $v_i(k)$ en $O_i(k)$ $(i \in \{1,2\})$. Voor een $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ geven we $(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}_c^\infty$ aan met $\tilde{x}$; voor $A \subset \mathbb{R}^k$ is $A^\sim := \{\tilde{a};\ a \in A\}$. Het is nu duidelijk dat

(3.1) $(M_1(k))^\sim \subset (M_1(k+1))^\sim$ voor elke $k \in \mathbb{N}$, $M_1^c = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (M_1(k))^\sim$,

(3.2) $M_2(k) \supset M_2(k+1)$ voor elke $k \in \mathbb{N}$, $M_2 = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} M_2(k)$,

(3.3) $v_i(k) \leq v_i(k+1)$ voor elke $k \in \mathbb{N}$ en $i \in \{1,2\}$,

(3.4) $\lim_{k\to\infty} v_1(k) = v_1^c$,

(3.5) $\lim_{k\to\infty} v_2(k) \leq v_2$.

Uit de dualiteitsstelling voor eindige programma's volgt dat

(3.6) $v_1(k) = v_2(k)$ voor grote k als $M_1^c \neq \emptyset$ of $M_2 \neq \emptyset$.

We zullen zeggen dat er sprake is van een <u>dualiteitskloof</u> als minstens één van de programma's (P_1^c) en (P_2) uitvoerbaar is en als $v_1^c \neq v_2$. Dit is precies dan het geval als er in (3.5) een strikte ongelijkheid staat. Dat dualiteitskloven voor halfoneindige programma's inderdaad kunnen optreden zien we aan de volgende

<u>VOORBEELDEN</u>.

1. Zij $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{3}{4} & \dots \end{bmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $c' := (-1, 0, 0, \dots)$.

   Dan $M_1^c = \{(1,0,0,0,\dots)\}$, $M_2 = \{y \in \mathbb{R}^2;\ y_1 \geq y_2\}$, $v_1^c = -1 \neq 0 = v_2$.

2. Zij $A := [1\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{4}\ \dots]$, $b := (0)$ en $c' = (0,1,1,1,\dots)$.

   Dan $v_1^c = 0 \neq \infty = v_2$.

In de volgende twee (<u>dualiteits</u>-) <u>stellingen</u> geven we voorwaarden die voldoende zijn om het niet optreden van een dualiteitskloof te garanderen. Hierbij is

$$\overline{\lim}\, O_2(k) := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (\mathrm{cl}(\bigcup_{s\geq k} O_2(s))).$$

STELLING 5. Stel $\overline{\lim}\ O_2(k) \neq \emptyset$. Dan $v_1^c = v_2 \in \mathbb{R}$ en $\emptyset \neq O_2 \supset \overline{\lim}\ O_2(k)$.

Bewijs: Zij $\hat{y} \in \overline{\lim}\ O_2(k)$. Dan is er een rij $y(k(1)), y(k(2)), \ldots$ waarbij $y(k(r)) \in O_2(k(r))$ voor elke $r \in \mathbb{N}$, welke convergeert naar $\hat{y} \in \overline{\lim}\ O_2(k) \subset M_2$. Maar dan

$$v_2 \leq \hat{y}'b = \lim_{r\to\infty} v_2(k(r)) = \lim_{r\to\infty} v_1(k(r)) = v_1^c.$$

Met het oog op (3.5) volgt dat $v_1^c = v_2$ en $\hat{y} \in O_2$. ||

STELLING 6. (zie ook [8], stelling 2.5.)
Zij $b_i > 0$ voor elke $i \in \{1,\ldots,m\}$. Dan $v_1^c = v_2 \in [0,\infty]$.
Als $v_1^c = \infty$, dan $M_2 = \emptyset$.
Als $v_2 \in [0,\infty)$, dan $O_2 \neq \emptyset$.

Bewijs: Omdat $0 \in M_1(k)$ voor elke $k \in \mathbb{N}$ volgt dat

(3.7) $\quad v_2(k) = v_1(k) \in [0,\infty]$ voor elke $k \in \mathbb{N}$.

Als $v_1^c = \infty$, dan volgt uit (3.4), (3.5) en (3.7) dat $v_2 = \infty = v_1^c$ en dat $M_2 = \emptyset$. Veronderstel nu dat $v_1^c \in [0,\infty)$. Dan is voor elke $k \in \mathbb{N}$ de niet-lege oplossingsruimte $O_2(k)$ een deelverzameling van de compacte verzameling $\{y \in \mathbb{R}^m;\ y \geq 0,\ y'b \leq v_1^c\}$. Maar dan $\overline{\lim}\ O_2(k) \neq \emptyset$. Uit stelling 5 volgt dan dat $v_1^c = v_2 \in \mathbb{R}$ en $O_2 \neq \emptyset$. ||

In de volgende stelling wordt een verband gelegd tussen de oplossingsruimten van halfoneindige programma's en die van de eindige deelprogramma's. Hierbij wordt gebruik gemaakt van het kritieke getal

$$cr := \inf \{k \in \mathbb{N};\ v_1(k) = v_1^c\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

STELLING 7. (Zie ook [8], blz.9-10.)
Veronderstel dat $v_1^c \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

(1) Als $cr = \infty$, dan $O_1^c = \emptyset$.

(2) Als $cr \in \mathbb{N}$, dan $O_1^c = \bigcup_{k \geq cr} (O_1(k))^{\sim}$.

(3) Als $cr \in \mathbb{N}$ en $v_2 = v_1^c$, dan $O_2 = \bigcap_{k \geq cr} O_2(k)$.

Bewijs: (a) Veronderstel dat $z = (z_1, z_2, \ldots) \in O_1^c$. Dan is er een $k \in \mathbb{N}$ zo dat $\tilde{r} = z$, waarbij $r := (z_1, z_2, \ldots, z_k) \in M_1(k)$. Dan

$v_1(k) \geq c(k)'r = c'z = v_1^c$. Met het oog op (3.3) en (3.4) volgt dan dat $v_1(k) = v_1^c$ en dus $cr \leq k < \infty$, $r \in O_1(k)$ en $z \in (O_1(k))^{\sim}$. Hiermee is (1) aangetoond en ook dat $O_1^c \subset \bigcup_{k \geq cr} (O_1(k))^{\sim}$.

Veronderstel nu dat $x \in O_1(k)$ voor zekere $k \geq cr$. Dan volgt uit

$$c'\tilde{x} = c(k)'x = v_1(k) = v_1^c$$

dat $\tilde{x} \in O_1^c$. Daarmee is (2) bewezen.

(b) Veronderstel nu dat $cr \in \mathbb{N}$ en $v_2 = v_1^c$. Zij $y \in O_2$ en $k \in \mathbb{N}$, $k \geq cr$. Dan

$$y'b = v_2 = v_1^c = v_1(k) = v_2(k),$$

waarbij de laatste gelijkheid volgt uit (3.6). Maar dan $y \in O_2(k)$. Dus $O_2 \subset \bigcap_{k \geq cr} O_2(k)$. Veronderstel nu dat $y \in \bigcap_{k \geq cr} O_2(k)$. Dan $y \in M_2$ en voor elke $k \geq cr$ geldt:

$$y'b = v_2(k) = v_1(k) = v_1^c = v_2.$$

Dus $y \in O_2$. Hiermee is ook (3) bewezen. $\|$

4. EINDIGE EN HALFONEINDIGE MATRIXSPELEN

In het volgende is $A = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m \quad n}$ een m×n-matrix, waarbij $m \in \mathbb{N}$ en $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Verder definiëren we

$S^k := \{p \in \mathbb{R}^k;\ p \geq 0,\ \Sigma_{i=1}^k\, p_i = 1\}$ voor elke $k \in \mathbb{N}$,

$S^\infty := \{q \in \mathbb{R}_c^\infty;\ q \geq 0,\ \Sigma_{j=1}^\infty\, q_j = 1\}$,

$\underline{v}(A) := \sup_{p \in S^m} \inf_{q \in S^n} p'Aq$ (benedenwaarde),

$\overline{v}(A) := \inf_{q \in S^n} \sup_{p \in S^m} p'Aq$ (bovenwaarde),

$O_I(A) := \{p \in S^m;\ \inf_{q \in S^n} p'Aq = \underline{v}(A)\}$ (optimale strategieënruimte voor speler I),

$O_{II}(A) := \{q \in S^n;\ \sup_{p \in S^m} p'Aq = \overline{v}(A)\}$.

Als $n \in \mathbb{N}$, dan $\underline{v}(A) = \overline{v}(A)$, $O_I(A) \neq \emptyset$ en $O_{II}(A) \neq \emptyset$; dit is de inhoud van de minimaxstelling van J. von Neumann uit 1928.
Voor halfoneindige matrixspelen A (waarbij dus $n = \infty$) zullen we een minimaxstelling afleiden door gebruik te maken van het feit dat zo'n matrixspel op een zinvolle wijze correspondeert met een

duaal paar van halfoneindige programma's zoals we zien in het volgende

LEMMA. Zij $m \in \mathbb{N}$ en A een $m\times\infty$-matrix, waarvoor $A \geq J := [1]_{i=1,j=1}^{m\ \ \infty}$. Laat v_1^c en v_2 de waarden zijn van de $m\times\infty$-programma's (P_1^c) en (P_2), corresponderend met het drietal $\langle A,b,c\rangle$, waarbij $b := (1,1,\dots,1)' \in \mathbb{R}^m$ en $c := (1,1,\dots)' \in \mathbb{R}^\infty$, en laat O_1^c en O_2 de oplossingsruimten van (P_1^c) en (P_2) zijn. Dan geldt:

(1) $v_1^c = v_2 \in (0,\infty)$ en $O_2 \neq \emptyset$.

(2) $\underline{v}(A) = v_2^{-1}$ en $O_I(A) \neq \emptyset$; $\overline{v}(A) = (v_1^c)^{-1}$.

(3) $O_I(A) = \{v_2^{-1}y;\ y \in O_2\}$; $O_{II}(A) = \{(v_1^c)^{-1}x;\ x \in O_1\}$.

Bewijs: We merken op dat $(1,0,\dots,0)' \in M_2 \neq \emptyset$, $0 \notin M_2$ en $b > 0$. Hieruit volgt (1) met behulp van stelling 6. Neem $\hat{y} \in O_2$ en definieer $\hat{p} := (\Sigma_{i=1}^m \hat{y}_i)^{-1}\hat{y} \in S^m$. Omdat $\hat{y}'Aq \geq c'q = 1$ voor elke $q \in S^\infty$, volgt:

(*) $\underline{v}(A) \geq \inf_{q\in S^\infty} \hat{p}'Aq \geq (\Sigma_{i=1}^m \hat{y}_i)^{-1} = (\hat{y}'b)^{-1} = v_2^{-1}$.

Zij $\varepsilon \in (0,v_1^c)$. Neem $\hat{x} \in M_1^c$ met $c'\hat{x} \geq v_1^c-\varepsilon$ en definieer $\hat{q} := (\Sigma_{j=1}^\infty \hat{x}_j)^{-1}\hat{x} \in S^\infty$. Dan

$$\overline{v}(A) \leq \sup_{p\in S^m} p'A\hat{q} \leq (\Sigma_{j=1}^\infty \hat{x}_j)^{-1}p'b = (\Sigma_{j=1}^\infty \hat{x}_j)^{-1} = (c'\hat{x})^{-1} \leq (v_1^c-\varepsilon)^{-1}.$$

Dus $\overline{v}(A) \leq (v_1^c-\varepsilon)^{-1}$ voor elke $\varepsilon \in (0,v_1^c)$. Maar dan

(**) $\overline{v}(A) \leq (v_1^c)^{-1}$.

Aangezien trivialiter geldt dat $\underline{v}(A) \leq \overline{v}(A)$, kunnen we uit (1), (*) en (**) concluderen dat $\overline{v}(A) = (v_1^c)^{-1} = v_2^{-1} = \underline{v}(A)$ en dat $\hat{p} \in O_I(A) \neq \emptyset$. Hiermee is dus (2) aangetoond. Verder volgt uit $v_2^{-1}\hat{y} = \hat{p}$, dat $O_I(A) \supset \{v_2^{-1}y;\ y \in O_2\}$. Omgekeerd: zij $p \in O_I(A)$. Dan geldt voor $y := v_2 p$ het volgende:

$$y \geq 0,\ y'A \geq v_2\ \underline{v}(A)(1,1,\dots) = c' \text{ en } y'b = v_2(p'b) = v_2.$$

Dus $y \in O_2$. Omdat $p = v_2^{-1}y$ volgt: $O_I(A) \subset \{v_2^{-1}y;\ y \in O_2\}$. Hiermee is de eerste gelijkheid in (3) aangetoond, terwijl de tweede gelijkheid op een analoge manier te bewijzen is. ||

STELLING 8. (Minimaxstelling voor halfoneindige spelen; zie ook [6].)
Zij A een naar beneden begrensde $m\times\infty$-matrix $(m \in \mathbb{N})$.
Dan $\underline{v}(A) = \overline{v}(A) \in \mathbb{R}$ en $O_I(A) \neq \emptyset$.

Bewijs: Omdat A naar beneden begrensd is kunnen we een $s \in \mathbb{R}$ kiezen zo dat $A+sJ \geq J$.
Uit bovenstaand lemma volgt dat

$$\underline{v}(A+sJ) = \overline{v}(A+sJ) \text{ en } O_I(A+sJ) \neq \emptyset.$$

Maar dan $\underline{v}(A) = \underline{v}(A+sJ)-s = \overline{v}(A+sJ)-s = \overline{v}(A)$ en $O_I(A) = O_I(A+sJ) \neq \emptyset$.
||

Met behulp van (3.4), stelling 7, bovenstaand lemma en de voor de hand liggende versie van dit lemma voor $m\times n$-matrixspelen waarbij $m \in \mathbb{N}$, volgt nu zonder veel moeite stelling 9. Deze stelling legt een verband tussen waarde en optimale strategieënruimten van halfoneindige spelen en die der eindige deelspelen.

STELLING 9. Zij $A = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m\ \ \infty}$ een naar beneden begrensde $m\times\infty$-matrix. Zij
$A(n) := [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m\ \ n}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ en
$cr(A) := \inf\{k \in \mathbb{N}\,;\ \overline{v}(A) = \overline{v}(A(k))\}$.
Er geldt:
(1) $\lim_{k\to\infty} \overline{v}(A(k)) = \overline{v}(A) = \underline{v}(A)$.
(2) Als $cr(A) = \infty$, dan $O_{II}(A) = \emptyset$.
(3) Als $cr(A) \in \mathbb{N}$, dan $O_I(A) = \bigcap_{k\geq cr(A)} O_I(A(k))$ en
$O_{II}(A) = \bigcup_{k\geq cr(A)} (O_{II}(A(k)))^{\sim}$.

Tenslotte merken we op dat de stellingen 8 en 9 ook bewezen kunnen worden door het matrixspel A te benaderen met deelspelen (zie [7]). Evenzo is het probleem van de existentie van ε-evenwichtspunten (voor elke $\varepsilon > 0$) voor halfoneindige bimatrixspelen met enige moeite ook aan te pakken door deze te benaderen met eindige deelspelen (zie [7], th.IV.2.1). Een andere weg voor dit laatste probleem werd gevolgd in [9].

REFERENCES

1. G.B. Dantzig, Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton N.J., (1963).
2. A.J. Goldman and A.W. Tucker, Theory of Linear Programming, in: Linear Inequalities and related Systems, Princeton University Press, Princeton N.J., (1956) 53-97.
3. R.B. Holmes, Geometric Functional Analysis and its Applications, Springer Verlag, Berlin (1975).
4. S. Karlin, Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics, Addison-Wesley Publ.Comp., Reading (1959).
5. W. Krabs, Optimierung und Approximation, Teubner, Stuttgart (1975).
6. A.L. Soyster, A Semi-infinite Game, Management Science 21 (1975) 806-812.
7. S.H. Tijs, Semi-infinite and infinite matrix games and bimatrix games, Proefschrift Nijmegen (1975).
8. S.H. Tijs, Semi-infinite linear programs and semi-infinite matrix games, Rapport 7630, Math.Inst., K.U. Nijmegen (1976).
9. S.H. Tijs, ε-Equilibrium point theorems for two-person games, Operations Research Verfahren 26 (1977) 755-766.
10. S.H. Tijs and J.M. Borwein, Some generalizations of Carathéodory's theorem, via barycentres, with application to mathematical programming (1978), to appear.

Mathematisch Instituut
Katholieke Universiteit
Toernooiveld
Nijmegen
Nederland

(received April 1978)